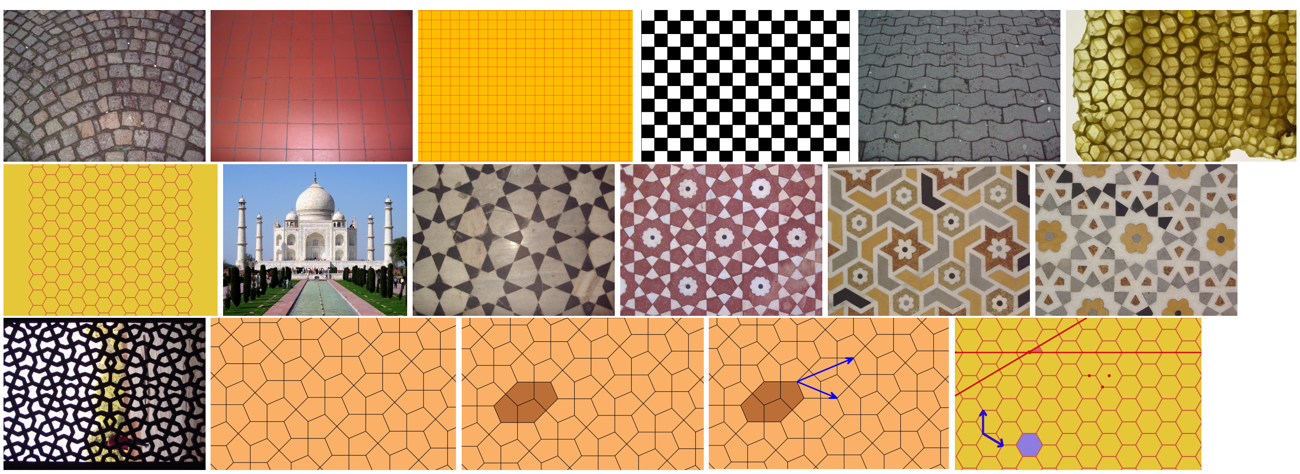
Pflasterungen mit Polyominos

Mathe+
Mathe-AG an der Uni Bielefeld
Dirk Frettlöh

Bielefeld, 19. Januar 2019

1 Einleitung

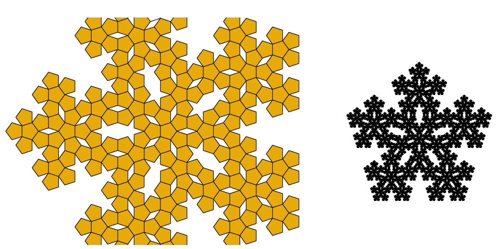
Was soll ”’Pflasterung’“ hier heißen? Die Bilder geben eine Idee:



Pflasterung heißt hier also: lückenlose und überlappungsfreie Überdeckung eines Gebiets. Welchen Gebiets?

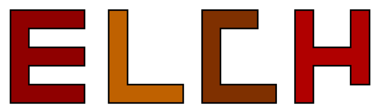
2 Pflasterungen der Ebene

Zunächst mal wollen wir die ganze (zweidimensionale, unendliche) Ebene pflastern. Oben sahen wir, dass das mit Quadraten funktioniert, ebenso mit regelmäßigen Sechsecken (und mit unregelmäßigen Fünfecken). Was ist mit anderen Steintypen? Probiert man etwa ein regelmäßiges Fünfeck, dann merkt man, dass es nicht klappt: es bleiben immer Lücken.



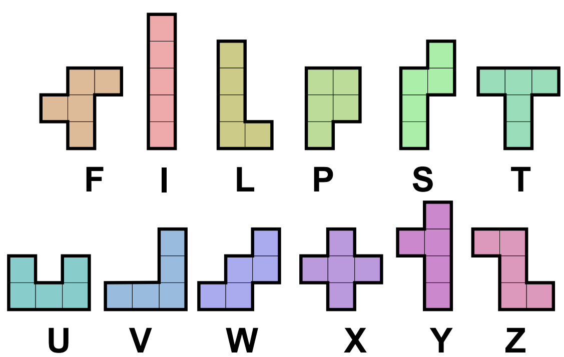
Frage 1: Warum genau klappt es nicht? Dazu: Was ist der Innenwinkel in einem regelmäßigen Fünfeck?

Frage 2: Was ist mit den folgenden Steinen: kann man mit denen die Ebene pflastern? (wie immer lückenlos und ohne dass sich die Steine überlappen). Geht es mit den Es? Oder mit den Ls? Oder mit den Cs? Oder mit den Hs?



3 Polyominos

Die Steine eben — das E, das L, das C und das H — sind **Polyominos**. Polyominos sind Steine, die aus kleinen gleichgroßen Quadraten zusammengesetzt sind, so dass die Quadrate Ecken an Ecke liegen. Das folgende Bild zeigt alle 12 Polyominos, die aus fünf Quadraten bestehen. Die heißen **Pentominos** (griechisch: *penta* = fünf).



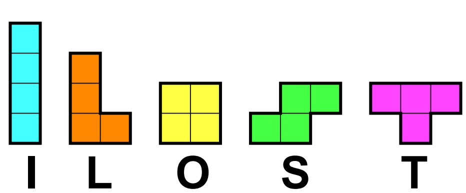
Frage 3: Welche der Pentominos pflastern die Ebene?

4 Pflasterungen von endlichen Gebieten

Frage 4: Mit welchen Pentominos kann man ein Quadrat der Seitenlänge 8 pflastern?

Frage 5: Mit welchen Pentominos kann man ein Quadrat der Seitenlänge 5 pflastern?

Die Polyominos aus 4 Quadraten heißen **Tetrominos**, von *tetra*, griechisch '“vier”', so wie in Tetrapak, Tetraeder, oder Tetris.

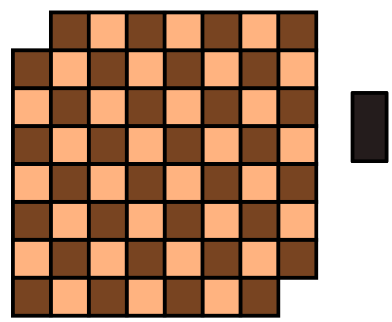


Es gibt übrigens ein altes Computerspiel von 1989 namens Blockout, das im Prinzip 3D-Tetris ist. Als Steine gibt es dort die Tetrominos (in dick, also jeder Stein besteht aus 4 kleinen Würfeln) oder die Pentominos (auch in dick) oder noch andere.

Frage 6: Mit welchen Tetrominos kann man ein Quadrat der Seitenlänge 8 pflastern?

So ziemlich die einfachsten Polyominos sind **Dominos**: die bestehen aus nur zwei Quadraten. Es gibt nur eine Sorte von Dominos: Rechteck mit Seitenlängen 1 und 2. Das folgende Rätsel ist ein Klassiker:

Kann man ein Schachbrett, von dem zwei gegenüberliegende Ecken entfernt wurden, mit Dominos pflastern?

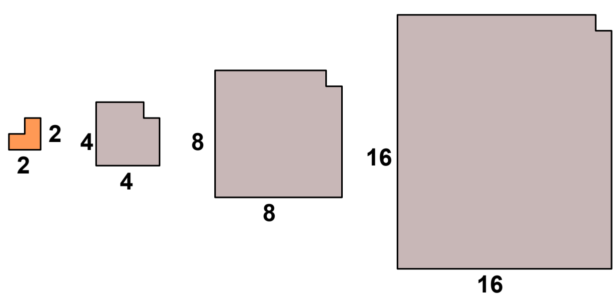


Es ist nicht möglich. Denn: jedes Domino bedeckt jeweils ein weißes und ein schwarzes Feld. Also werden immer gleich viele weiße wie schwarze Felder bedeckt. Aber das gekappte Schachbrett hat 30 weiße und 32 schwarze Felder.

Mit ähnlichen Tricks kann man (fast alle) folgenden Fragen lösen.

Frage 7: Auf einem 5×5-Schachbrett steht auf jedem Feld genau ein Käfer. Um genau 12:00:00 Uhr bewegt sich jeder Käfer auf ein Nachbarfeld (waagerecht oder senkrecht, nicht diagonal). Ist es möglich, dass danach wieder auf jedem Feld genau ein Käfer steht?

Frage 8: Kann man mit dem orangefarbenen Stein die gezeigten Felder pflastern? (Die Felder sind $2^n \times 2^n$-Schachbretter, bei denen jeweils ein Eckfeld entfernt wurde.)



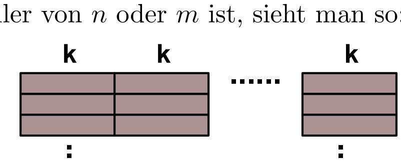
Frage 9: Kann man mit dem I-Tetromino ein 10×10-Schachbrett pflastern?

Frage 10: Kann man mit dem T-Tetromino ein 9×10-Schachbrett pflastern?

Es geht noch allgemeiner:

Satz 1: Ein Rechteck der Seitenlängen 1 und k kann ein $m \times n$-Schachbrett genau dann pflastern, wenn k ein Teiler von n oder von m ist.

Dass es immer geht, falls k Teiler von n oder m ist, sieht man so:

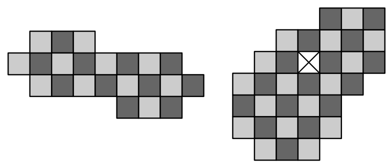


Dass es anders nie geht, sieht man wie in der Antwort von Frage 9.

5 Der Heiratssatz

Was ist mit Gebieten, die keine Rechtecke sind?

Frage 11: Kann man die folgenden Gebiete mit Dominos pflastern? (Es sind jeweils gleichviel weiße wie schwarze Felder. Das ganz weiße Quadrat mit einem x im Inneren des größeren Gebiets ist ein Loch; das ist *kein* Feld.))



Eine Aussage '"ein Gebiet lässt sich genau dann mit Dominos pflastern, falls...'liefert der folgende Fakt.

Satz 2: (Heiratssatz) Es gebe n Männer, die alle heiraten wollen, je eine von n Frauen ($m \leq n$). Jeder Mann heiratet aber jeweils nur eine Frau, die er bereits kennt. Alle Männer können genau dann verheiratet werden, falls für jede Auswahl von k Männern aus den n Männern gilt, dass sie insgesamt mindestens k Frauen kennen.

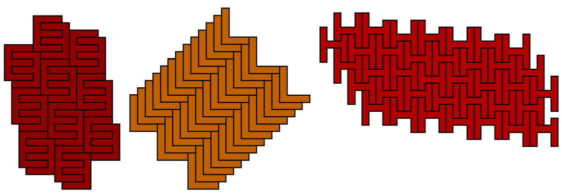
Angewandt auf unsere Dominopflasterungen heißt das: eine Pflasterung mit Dominos gibt es genau dann, wenn jede Auswahl von k weißen Feldern insgesamt mindestens k schwarze Nachbarfelder haben, und umgekehrt.

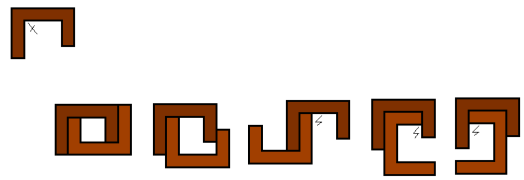
6 Anworten

Antworten oder Lösungshinweise zu den Fragen oben.

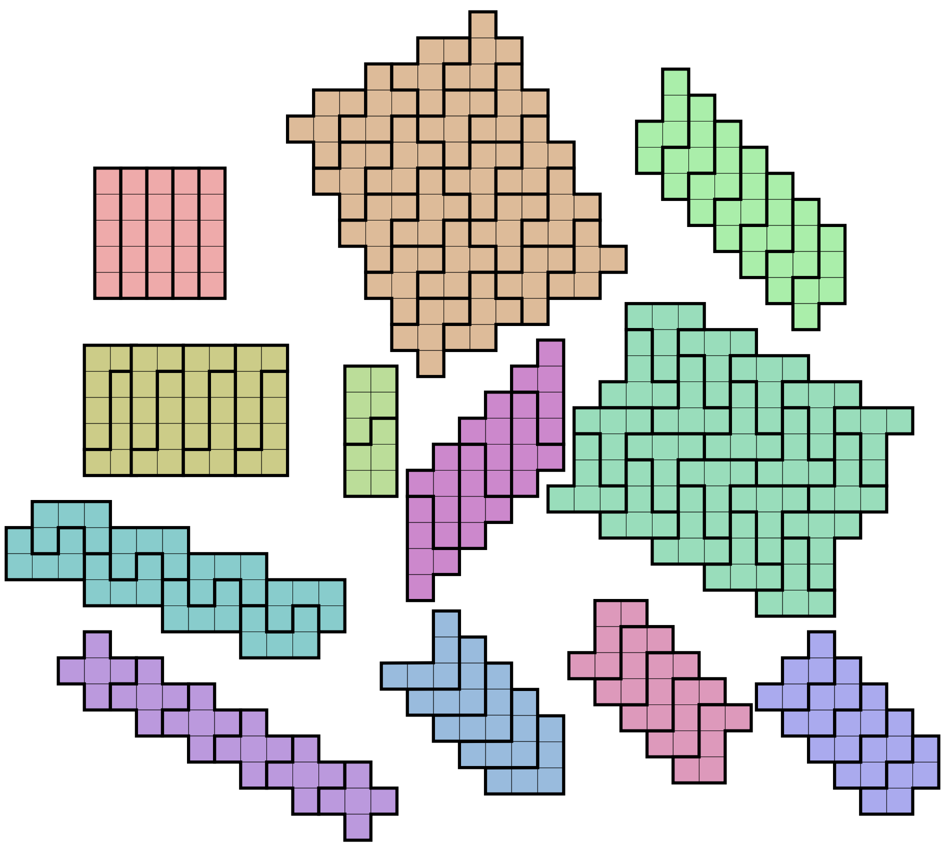
Zu Frage 1: Der Innenwinkel in einem regelmäßigen Fünfeck ist 108°. Drei Fünfecke, and den Ecken aneinandergelegt, ergeben 324°, das ist zu wenig: es bleibt eine Lücke. Die Lücke ist aber zu klein für ein viertes Fünfeck.

Zu Frage 2: Mit Es kann man die Ebene pflastern, ebenso mit Ls und mit Hs (Bild links). Mit Cs geht es nicht (Bild rechts):





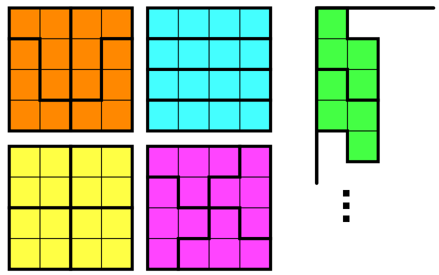
Zu Frage 3: Alle klappen. Im Bild ist angedeutet wie.



Zu Frage 4: Keins klappt. Denn jedes Pentomino bedeckt genau 5 Felder, aber 64 ist nicht durch 5 teilbar.

Zu Frage 5: Nur das I klappt. Durchprobieren der anderen zeigt schnell, dass die nicht klappen.

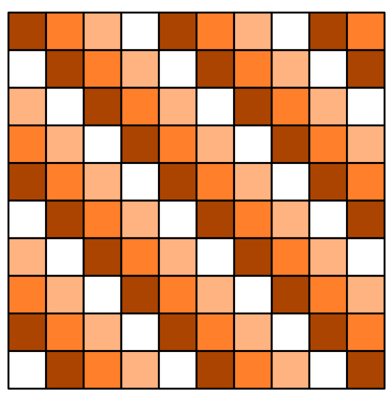
Zu Frage 6: Alle außer einem klappt. Im Bild ist angedeutet wie.



Zu Frage 7: Geht nicht: ein 5×5-Schachbrett hat 12 weiße und 13 schwarze Felder (oder umgekehrt). Am Anfang stehen 13 Käfer auf einem weißen Feld. Anschließen dtshen 13 Käfer auf einem schwarzen Feld, d.h. mindestens zwei stehen auf demselben Feld.

Zu Frage 8: Klappt. Das 4×4 findet man schnell durch ausprobieren. Drei Kopien davon, mit den gekappten Ecken um einen einzelnen Stein herum angeordnet, ergeben die Lösung für das 8×8-Brett. Drei Kopien *davon*, um einen einzelnen Stein herum angeordnet, ergeben die Lösung für das 16×16-Brett, usw.

Zu Frage 9: Es geht nicht. Dazu kann man das Brett mit vier Farben so einfärben:



Jedes I-Tetromino bedeckt dann genau 4 verschiedene Farben. Es müssten also gleich viele Felder von jeder Farbe da sein, nämlich 25. Es gibt aber nur 24 dunkelbraune, das ist eins zu wenig.

Zu Frage 10: Wenn wir das 9×10-Brett wieder wie ein Schachbrett färben, bedeckt jedes Tetromino genau 3 schwarze Felder und ein weißes Feld, oder umgekehrt. Es gibt gleichviel weiße wie schwarze Felder. Also muss für jedes mehr-schwarze-Tetromino genau ein mehr-weiße-Tetromino gelegt werden. Dazu müsste die Zahl der Felder durch 8 teilbar sein. Also geht es nicht.

Zu Frage 11: Beides geht nicht. Beim kleineren Feld sieht man es schnell durch ausprobieren. Beim größeren Feld haben die sechs schwarzen Felder im rot umrandeten Bereich insgesamt nur fünf Nachbarn.